Függvények határértéke és folytonossága

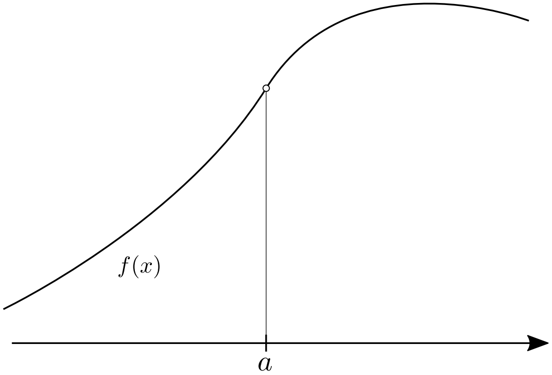
Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

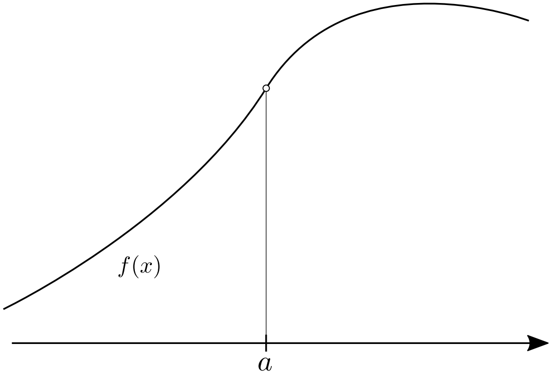
Példa hogy miért kell határérték

Vegyünk egy tetszőleges akár mindenütt, de a-ban értelmezett f függvényt. Ekkor $g(x) = \frac{(x-a)f(x)}{x-a}$ függvény nem lesz értelmezett a-ban.



Példa hogy miért kell határérték

Vegyünk egy tetszőleges akár mindenütt, de a-ban értelmezett f függvényt. Ekkor $g(x) = \frac{(x-a)f(x)}{x-a}$ függvény nem lesz értelmezett a-ban.



Szeretnénk matematikailag meghatározni, hogy a-ban milyen értéket adjunk a $g(x)$ függvénynek.

Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú környezete a* $(a - r, a + r)$ *intervallum, jele* $K_r(a)$.

Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú környezete a* $(a - r, a + r)$ *intervallum, jele* $K_r(a)$.

Köznapi nyelven megfogalmazva: Az r sugarú környezet az a-hoz r-nél is közelebb lévő számok halmaza.

Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú környezete a* $(a - r, a + r)$ *intervallum, jele* $K_r(a)$.

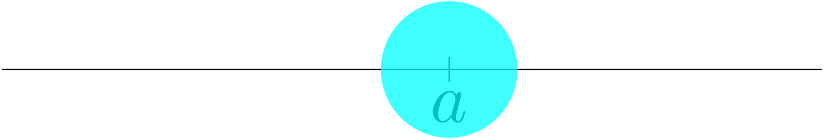
Köznapi nyelven megfogalmazva: Az r sugarú környezet az a-hoz r-nél is közelebb lévő számok halmaza.

Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú környezete a* $(a - r, a + r)$ *intervallum, jele* $K_r(a)$.

Köznapi nyelven megfogalmazva: Az r sugarú környezet az a-hoz r-nél is közelebb lévő számok halmaza.

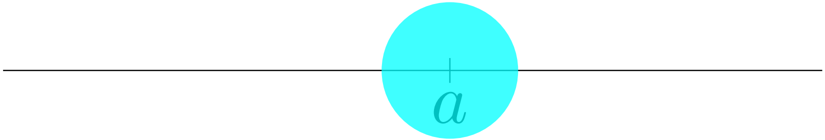


Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú környezete a* $(a - r, a + r)$ *intervallum, jele* $K_r(a)$.

Köznapi nyelven megfogalmazva: Az r sugarú környezet az a-hoz r-nél is közelebb lévő számok halmaza.



Például a $K_2(3) = (1,5)$.

Pontozott Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú pontozott környezete a* $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ *halmaz, jele* $\dot{K}_r(a)$.

Pontozott Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú pontozott környezete a* $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ *halmaz, jele* $\dot{K}_r(a)$.

Másképpen: minden a-hoz r-nél közelebb lévő számokból álló halmaz, kivéve magát a-t.

Pontozott Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú pontozott környezete a* $(a-r,a) \cup (a,a+r)$ *halmaz, jele* $\dot{K}_r(a)$.

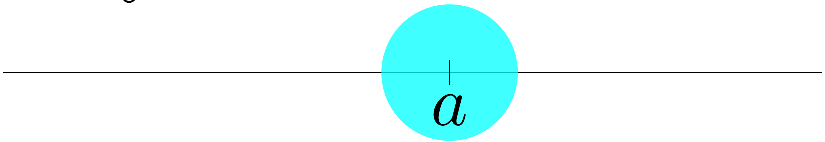
Másképpen: minden a-hoz r-nél közelebb lévő számokból álló halmaz, kivéve magát a-t.

Pontozott Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *és* $r > 0$ *tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú pontozott környezete a* $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ *halmaz, jele* $\dot{K}_r(a)$.

Másképpen: minden a-hoz r-nél közelebb lévő számokból álló halmaz, kivéve magát a-t.

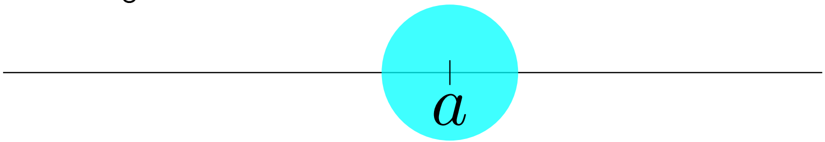


Pontozott Környezet

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú pontozott környezete a $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ halmaz, jele $\dot{K}_r(a)$.

Másképpen: minden a-hoz r-nél közelebb lévő számokból álló halmaz, kivéve magát a-t.



Például a $\dot{K}_2(3) = (1,3) \cup (3,5)$ vagy $\dot{K}_2(3) = (1,5) \setminus \{3\}$.

Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a* H *halmaz torlódási pontja, ha* $\forall r > 0$*-ra* $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a* H *halmaz torlódási pontja, ha* $\forall\, r > 0$*-ra* $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

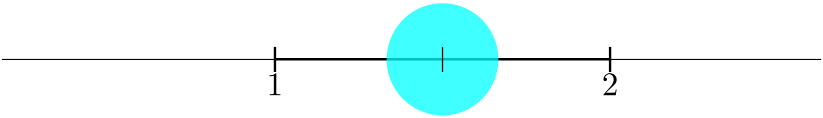
Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a H halmaz torlódási pontja, ha $\forall r > 0$-ra $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = [1,2]$ intervallum torlódási pontja az $a = 1.5$ szám.



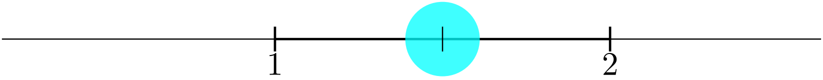
Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a H halmaz torlódási pontja, ha $\forall r > 0$-ra $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = [1,2]$ intervallum torlódási pontja az $a = 1.5$ szám.



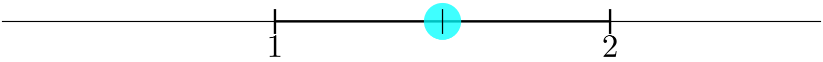
Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az* a *szám a* H *halmaz torlódási pontja, ha* $\forall r > 0$*-ra* $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = [1,2]$ intervallum torlódási pontja az $a = 1.5$ szám.



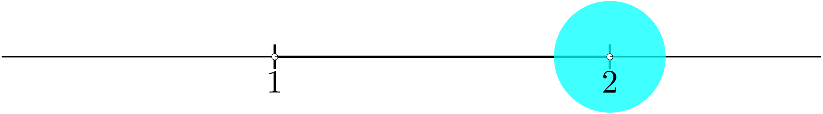
Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a H halmaz torlódási pontja, ha $\forall r > 0$-ra $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = (1,2)$ intervallum torlódási pontja az $a = 2$ szám.



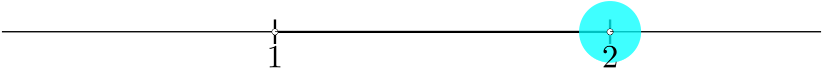
Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a H halmaz torlódási pontja, ha $\forall r > 0$-ra $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = (1,2)$ intervallum torlódási pontja az $a = 2$ szám.



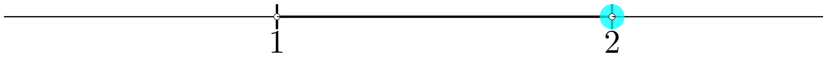
Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a H halmaz torlódási pontja, ha $\forall r > 0$-ra $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = (1,2)$ intervallum torlódási pontja az $a = 2$ szám.



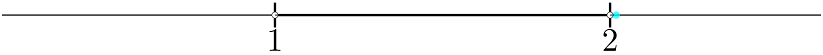
Torlódási pont

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a H halmaz torlódási pontja, ha* $\forall r > 0$*-ra* $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = (1,2)$-nek nem torlódási pontja az $a = 2.001$.



Függvény határértéke

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az a pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $x \in \dot{K}_\delta(a)$*, akkor* $f(x) \in K_\varepsilon(A)$*. Jele:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$*.*

Függvény határértéke

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az a pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $x \in \dot{K}_\delta(a)$*, akkor* $f(x) \in K_\varepsilon(A)$*. Jele:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$*.*

Környezetek helyett abszolút értékkel megfogalmazva a fenti definíciót:

Függvény határértéke

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az* a *pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $x \in \dot{K}_\delta(a)$*, akkor* $f(x) \in K_\varepsilon(A)$*. Jele:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$*.*

Környezetek helyett abszolút értékkel megfogalmazva a fenti definíciót:

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az* a *pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $0 < |x - a| < \delta$*, akkor* $|f(x) - A| < \varepsilon$*.*

Függvény határértéke, Ábra

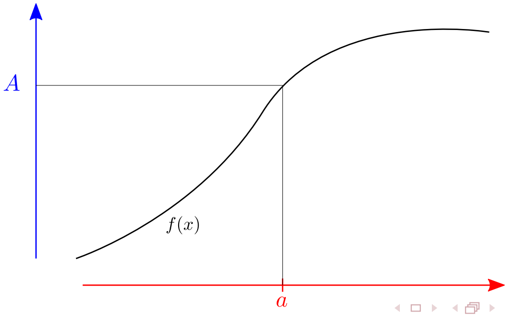
Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az* a *pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $0 < |x - a| < \delta$*, akkor* $|f(x) - A| < \varepsilon$*.*

Függvény határértéke, Ábra

Definíció

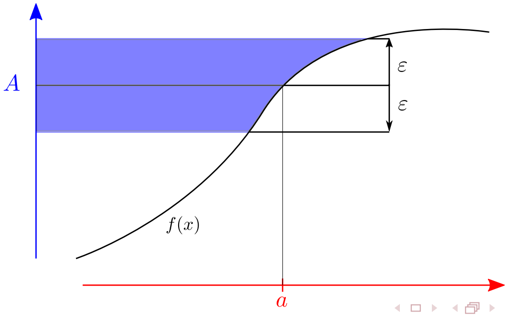
Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az* a *pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $0 < |x - a| < \delta$*, akkor* $|f(x) - A| < \varepsilon$*.*



Függvény határértéke, Ábra

Definíció

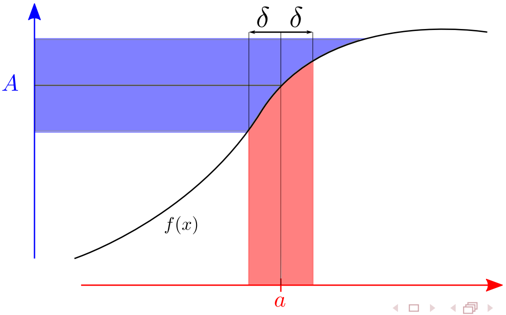
Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az* a *pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $0 < |x - a| < \delta$*, akkor* $|f(x) - A| < \varepsilon$*.*



Függvény határértéke, Ábra

Definíció

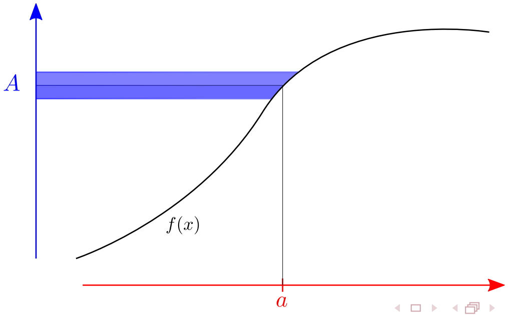
Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke az a pontban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Függvény határértéke, Ábra

Definíció

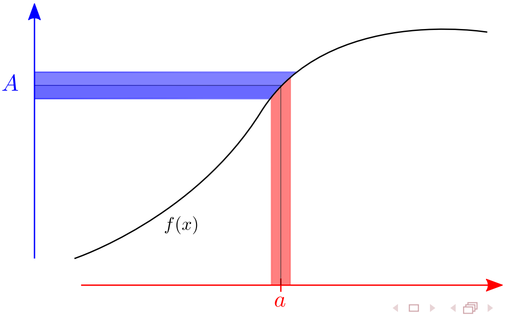
Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az* a *pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $0 < |x - a| < \delta$*, akkor* $|f(x) - A| < \varepsilon$*.*



Függvény határértéke, Ábra

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ *az* $f(x)$ *függvény értelmezési tartományának,* D_f*-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az* $f(x)$ *függvény határértéke az* a *pontban a* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-ra* $\exists \delta > 0$ *hogy ha* $x \in D_f$ *és* $0 < |x - a| < \delta$*, akkor* $|f(x) - A| < \varepsilon$*.*



Konkrét Példa

Példa: Legyen $f(x) = -2x + 4$. Igazoljuk definíció szerint, hogy $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$! Ez a függvény mindenütt definiált. Így az 1 a D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a fv-nek 1-ben határértéke.

Konkrét Példa

Példa: Legyen $f(x) = -2x + 4$. Igazoljuk definíció szerint, hogy $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$! Ez a függvény mindenütt definiált. Így az 1 a D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a fv-nek 1-ben határértéke.

Azt kell tehát belátnunk, hogy bármely nekem adott $\varepsilon > 0$-ra, tudok adni egy olyan δ-t, hogy ha $0 < |x - 1| < \delta$ akkor $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Konkrét Példa

Példa: Legyen $f(x) = -2x + 4$. Igazoljuk definíció szerint, hogy $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$! Ez a függvény mindenütt definiált. Így az 1 a D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a fv-nek 1-ben határértéke.

Azt kell tehát belátnunk, hogy bármely nekem adott $\varepsilon > 0$-ra, tudok adni egy olyan δ-t, hogy ha $0 < |x-1| < \delta$ akkor $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

$$\varepsilon > |f(x) - 2| = |-2x + 4 - 2| = |-2x + 2| = 2|x - 1|$$

Innen egyszerűsítve kapjuk, hogy $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Innen látszik, hogy a $\delta = \varepsilon/2$ jó választás lesz, hiszen ha $0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$, akkor $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Példa 2

Példa 2: Legyen $f(x) = \frac{3x^2}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a fv-nek 0-ban határértéke. Megkérdezhetem: $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$

Példa 2

Példa 2: Legyen $f(x) = \frac{3x^2}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a fv-nek 0-ban határértéke. Megkérdezhetem: $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

Most tehát a hely $a = 0$, ekkor a függvény értékeknek közel kell esniük valamilyen fix A számhoz, ha 0-hoz közeli értékeket helyettesítek be. Ez most teljesül, mert a függvény 0-hoz tetszőlegesen közeli kis $x \neq 0$-ákra is értelmezett, és ekkor $f(x) = \frac{3x^2}{x} = 3x$. Tehát $A = 0$ tűnik jó választásnak.

Példa 2

Példa 2: Legyen $f(x) = \frac{3x^2}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a fv-nek 0-ban határértéke. Megkérdezhetem: $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

Most tehát a hely $a = 0$, ekkor a függvény értékeknek közel kell esniük valamilyen fix A számhoz, ha 0-hoz közeli értékeket helyettesítek be. Ez most teljesül, mert a függvény 0-hoz tetszőlegesen közeli kis $x \neq 0$-ákra is értelmezett, és ekkor $f(x) = \frac{3x^2}{x} = 3x$. Tehát $A = 0$ tűnik jó választásnak. Az ellenség mond egy ε-t. Mutassunk δ-t, hogy $|f(x) - A| = |f(x)| < \varepsilon$, ha $0 < |x - a| = |x| < \delta$.

$$\varepsilon > |f(x) - A| = \left| \frac{3x^2}{x} - 0 \right| = |3x| = 3|x|$$

Válasszuk $\delta = \varepsilon/3$-t. Így ha $|x| < \delta = \varepsilon/3$, akkor $|f(x) - A| = 3|x| < \varepsilon$, azaz a határérték $A = 0$.

Példa 3

Példa 3: Legyen $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a függvénynek 0-ban határértéke. Mennyi $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Példa 3

Példa 3: Legyen $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a függvénynek 0-ban határértéke. Mennyi $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Vegyük észre:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & \text{ha } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Példa 3

Példa 3: Legyen $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a függvénynek 0-ban határértéke. Mennyi $\lim_{x \to 0} f(x)$?

Vegyük észre:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & \text{ha } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Most tehát a hely $a = 0$, ekkor a függvény értékeknek közel kell esniük valamilyen fix A számhoz, ha 0-hoz közeli értékeket helyettesítek be. Ez nem teljesül, mert a függvény 0-hoz tetszőlegesen közeli helyen felvesz 1-et (ha pozitív számot helyettesítek be), illetve -1-et, ha negatív számot. Így nem kerülök közel egyetlen rögzített A-hoz sem, azaz a függvénynek nincs határértéke 0-ban.

Jobboldali határérték

Az előző példának nincsen határértéke 0-ban. Valójában teljesen másképp viselkedik a függvény a negatív számokra, mint a pozitívakra. Hogy jellemezni tudjuk az ilyen függvények viselkedését bevezetjük a féloldali határérték fogalmát:

Jobboldali határérték

Az előző példának nincsen határértéke 0-ban. Valójában teljesen másképp viselkedik a függvény a negatív számokra, mint a pozitívakra. Hogy jellemezni tudjuk az ilyen függvények viselkedését bevezetjük a féloldali határérték fogalmát:

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény jobboldali határértéke az a pontban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < x - a < \delta$, akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Jele: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$.

Baloldali határérték

Az előző példának nincsen határértéke 0-ban. Valójában teljesen másképp viselkedik a függvény a negatív számokra, mint a pozitívakra. Hogy jellemezni tudjuk az ilyen függvények viselkedését bevezetjük a féloldali határérték fogalmát:

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény baloldali határértéke az a pontban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < a - x < \delta$, akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Jele: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$.

Baloldali határérték

Az előző példának nincsen határértéke 0-ban. Valójában teljesen másképp viselkedik a függvény a negatív számokra, mint a pozitívakra. Hogy jellemezni tudjuk az ilyen függvények viselkedését bevezetjük a féloldali határérték fogalmát:

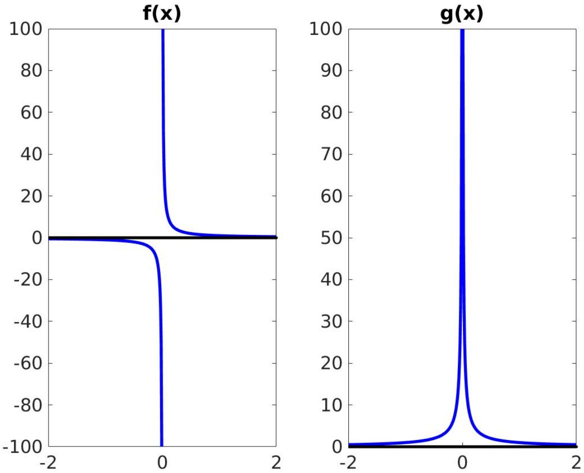
Definíció

*Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény **baloldali** határértéke az a pontban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < a - x < \delta$, akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Jele: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$.*

A megfelelő definícióból látjuk, hogy az előbbi példában $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$ és $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$.

Példa

Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}$ és a $g(x) = \frac{1}{|x|}$ függvényeket. Mi lehet a határértékük a 0-ban?



Végesben vett végtelen határérték

Próbáljuk meg kitalálni az eddigiek alapján, hogy mi lehet a $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ definíciója!

Végesben vett végtelen határérték

Próbáljuk meg kitalálni az eddigiek alapján, hogy mi lehet a $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ definíciója!

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke az a-ban $+\infty$, ha $\forall K > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x \in \dot{K}_\delta(a)$ (vagyis $0 < |x - a| < \delta$) akkor $f(x) > K$.

Végesben vett végtelen határérték

Próbáljuk meg kitalálni az eddigiek alapján, hogy mi lehet a $\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty$ definíciója!

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény jobboldali határértéke az a-ban $+\infty$, ha $\forall K > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x \in \dot{K}_\delta(a) \cap (a, +\infty)$ (vagyis $0 < x - a < \delta$) akkor $f(x) > K$.

Végesben vett végtelen határérték

Próbáljuk meg kitalálni az eddigiek alapján, hogy mi lehet a $\lim_{x\to a-} f(x) = +\infty$ definíciója!

Definíció

Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény baloldali határértéke az a-ban $+\infty$, ha $\forall K > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x \in \dot{K}_\delta(a) \cap (-\infty, a)$ (vagyis $0 < a - x < \delta$) akkor $f(x) > K$.

Példa

Példa: Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ függvény határértéke az 1-ben $+\infty$.

Legyen $K > 0$, ekkor kéne:

$$K < f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \text{ha } 0 < |x-1| < \delta \text{ valamely } \delta\text{-ra.}$$

Példa

Példa: Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ függvény határértéke az 1-ben $+\infty$.

Legyen $K > 0$, ekkor kéne:

$$K < f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \text{ha } 0 < |x-1| < \delta \text{ valamely } \delta\text{-ra.}$$

Ebből:

$$(x-1)^2 < \frac{1}{K}$$

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{K}}$$

Így $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$ jó választás.

Függvény határértéke végtelenben

A függvény határértéke a plusz végtelenben nagyon hasonlít a sorozat határértékére.

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya, D_f nem felülről korlátos. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke a $+\infty$-ban a $A \in \mathbb{R}$ szám, jele: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$. Ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists K > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x > K$ akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$ (vagyis $|f(x) - A| < \varepsilon$).

Függvény határértéke végtelenben

A függvény határértéke a plusz végtelenben nagyon hasonlít a sorozat határértékére.

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya, D_f nem felülről korlátos. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke a $+\infty$-ban a $A \in \mathbb{R}$ szám, jele: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists K > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x > K$ akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$ (vagyis $|f(x) - A| < \varepsilon$).

Látható hogy szinte megegyezik a sorozat határértékkel csak itt a_n és n helyett $f(x)$ és x van.

Példa

Példa: Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{x^2+5}{3x^2+2}$ függvény határértéke plusz végtelenben $\dfrac{1}{3}$!

Példa

Példa: Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{x^2+5}{3x^2+2}$ függvény határértéke plusz végtelenben $\dfrac{1}{3}$!

$$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(x^2+5) - (3x^2+2)}{3(3x^2+2)}\right| = \frac{13}{9x^2+6}$$

Példa

Példa: Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{x^2+5}{3x^2+2}$ függvény határértéke plusz végtelenben $\dfrac{1}{3}$!

$$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(x^2+5) - (3x^2+2)}{3(3x^2+2)}\right| = \frac{13}{9x^2+6}$$

Továbbá:

$$\frac{13}{9x^2+6} < \frac{13}{9x^2} = \frac{13}{9}\frac{1}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{13}{9\varepsilon} < x^2,$$

ha $x > \sqrt{\frac{13}{9\varepsilon}}$. Így $K = \sqrt{\frac{13}{9\varepsilon}}$ jó választás.

Átviteli elv

Egy függvény határértékét hasonlóan számíthatjuk ki, mint egy sorozatét. Sőt, fennáll a következő fontos tétel:

Átviteli elv: $$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{c} \text{minden } (x_n) \subset D_f \text{ sorozatra,} \\ \text{amelyre } x_n \neq a \text{ és } x_n \to a \text{ esetén} \\ f(x_n) \to A. \end{array}$$

Átviteli elv

Egy függvény határértékét hasonlóan számíthatjuk ki, mint egy sorozatét. Sőt, fennáll a következő fontos tétel:

Átviteli elv: $\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad$ minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, amelyre $x_n \neq a$ és $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to A$.

Ebben a tételben mind a mind A lehet tetszőleges valós szám, $+\infty$ és $-\infty$ is.

Átviteli elv

Egy függvény határértékét hasonlóan számíthatjuk ki, mint egy sorozatét. Sőt, fennáll a következő fontos tétel:

Átviteli elv: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad\Leftrightarrow\quad$ minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, amelyre $x_n \neq a$ és $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to A$.

Ebben a tételben mind a mind A lehet tetszőleges valós szám, $+\infty$ és $-\infty$ is.

Ennek az állításnak egyenes következménye, hogy a függvény határértéke egyértelmű, és minden művelet elvégezhető vele, ami a sorozatok határértékével elvégezhető volt.

Műveletek és konvergencia

Tfh $f(x)$-nek és $g(x)$-nek van határértéke a-ban, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x)$ létezik és $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$.

Műveletek és konvergencia

Tfh $f(x)$-nek és $g(x)$-nek van határértéke a-ban, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x)$ létezik és $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x)$ létezik és $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$.

Műveletek és konvergencia

Tfh $f(x)$-nek és $g(x)$-nek van határértéke a-ban, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x)$ létezik és $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x)$ létezik és $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x)$ létezik és $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = A - B$.

Műveletek és konvergencia

Tfh $f(x)$-nek és $g(x)$-nek van határértéke a-ban, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $\lim_{x\to a} c \cdot f(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$.
- $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$.
- $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = A - B$.
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

Műveletek és konvergencia

Tfh $f(x)$-nek és $g(x)$-nek van határértéke a-ban, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $\lim_{x\to a} c \cdot f(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$.
- $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$.
- $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = A - B$.
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ létezik és $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.
- Ha $B \neq 0$, akkor $\lim_{x\to a} \big(f(x)/g(x)\big)$ létezik és $\lim_{x\to a} \big(f(x)/g(x)\big) = A/B$.

Példa

Igazoljuk, hogy $\nexists \lim\limits_{x \to \infty} \sin(x)$!

Példa

Igazoljuk, hogy $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$!

Tekintsük az $x_n = n\pi$ sorozatot, nyilván $x_n \to +\infty$. Ezen sorozat mentén vizsgálva a függvényértékeket $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$. Azaz $f(x_n) \to 0$.

Példa

Igazoljuk, hogy $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$!

Tekintsük az $x_n = n\pi$ sorozatot, nyilván $x_n \to +\infty$. Ezen sorozat mentén vizsgálva a függvényértékeket $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$. Azaz $f(x_n) \to 0$.

Vegyünk egy másik sorozatot, legyen $\tilde{x}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, nyilván $\tilde{x}_n \to +\infty$. Ekkor $f(\tilde{x}_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$. Emiatt ezen sorozat mentén $f(\tilde{x}_n) \to 1$.

Példa

Igazoljuk, hogy $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$!

Tekintsük az $x_n = n\pi$ sorozatot, nyilván $x_n \to +\infty$. Ezen sorozat mentén vizsgálva a függvényértékeket $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$. Azaz $f(x_n) \to 0$.

Vegyünk egy másik sorozatot, legyen $\tilde{x}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, nyilván $\tilde{x}_n \to +\infty$. Ekkor $f(\tilde{x}_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$. Emiatt ezen sorozat mentén $f(\tilde{x}_n) \to 1$.

A határérték egyértelmű, így minden végtelenhez tartó sorozat mentén a függvényértékeknek ugyanoda kellene tartaniuk az átviteli elv miatt. Mivel ez nem teljesül, ezért nem létezik határértéke $\sin(x)$-nek a végtelenben.

Nevezetes határértékek

Az alábbi függvény határértékek a sorozatok határértékéből következik átviteli elvvel és a függvények folytonosságának felhasználásával:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{x} = 1$$

Nevezetes határértékek

Az alábbi függvény határértékek a sorozatok határértékéből következik átviteli elvvel és a függvények folytonosságának felhasználásával:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} x^x = 1$$

Ha $p, c > 0$, $c \neq 1$ és $a > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_c x}{x^p} = 0$$

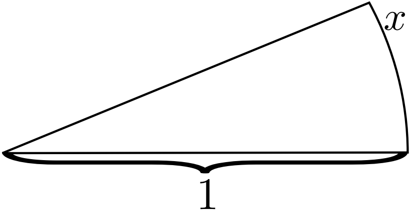
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$$

Egy nevezetes határérték

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

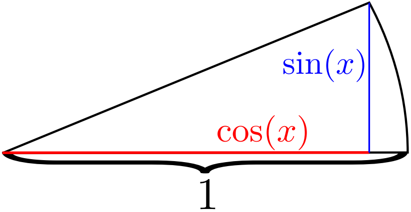
Egy nevezetes határérték

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



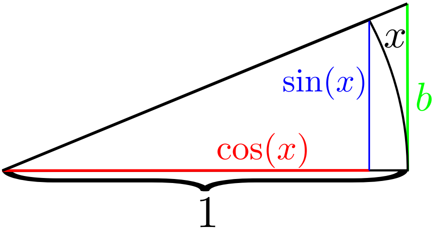
Egy nevezetes határérték

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



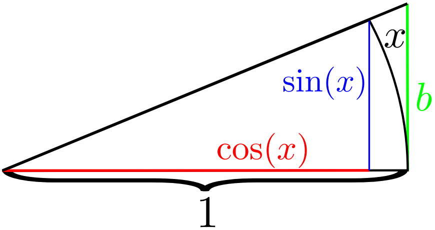
Egy nevezetes határérték

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



Egy nevezetes határérték

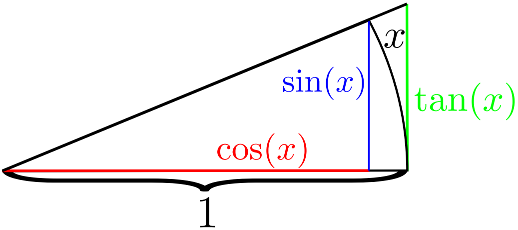
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{b}{1}$$

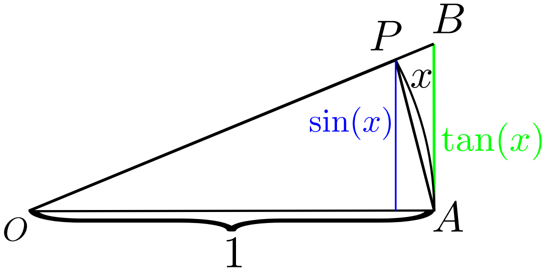
Egy nevezetes határérték

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



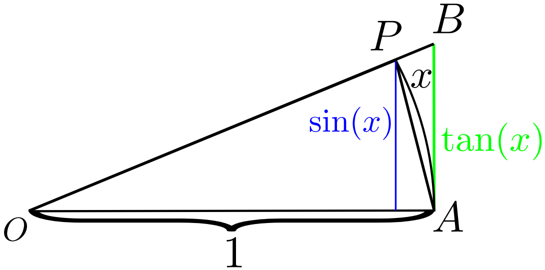
Egy nevezetes határérték

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



Egy nevezetes határérték

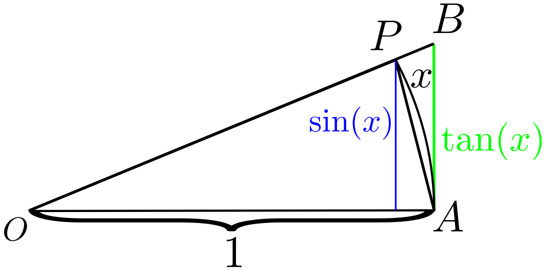
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$T_{POA\triangle} \leq T_{POA\triangleleft} \leq T_{BOA\triangle}$$

Egy nevezetes határérték

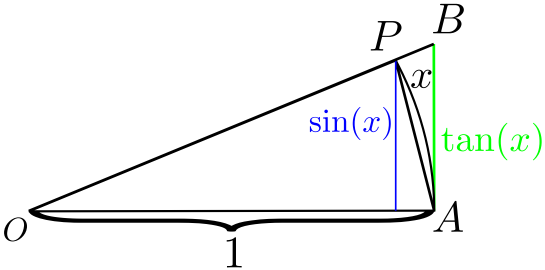
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$$

Egy nevezetes határérték

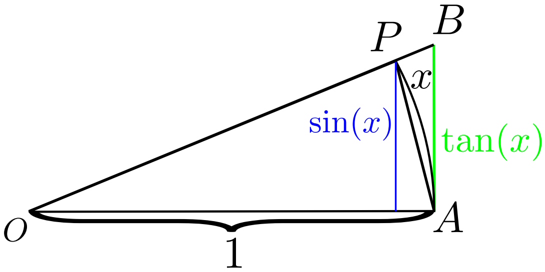
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \qquad \Big| : \frac{\sin(x)}{2} > 0$$

Egy nevezetes határérték

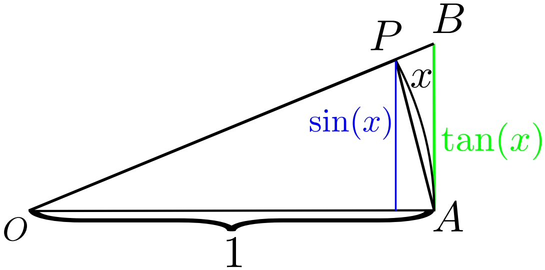
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Egy nevezetes határérték

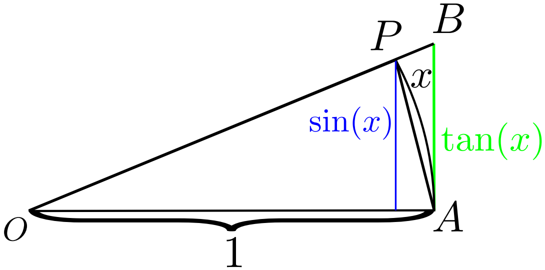
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



$$\frac{\cos(x)}{1} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

Egy nevezetes határérték

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$



$$\frac{\cos(x)}{1}\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq 1 \text{ és } \lim_{x\to 0}\cos(x)=1.$$

Folytonosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ *és* $f(a) = A$.

Folytonosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ *és* $f(a) = A$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a-ban, akkor

- $f(x) + g(x)$,

is folytonos a-ban.

Folytonosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $f(a) = A$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a-ban, akkor

- $f(x) + g(x)$,
- $f(x) - g(x)$,

is folytonos a-ban.

Folytonosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $f(a) = A$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a-ban, akkor

- $f(x) + g(x)$,
- $f(x) - g(x)$,
- $f(x)g(x)$,

is folytonos a-ban.

Folytonosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $f(a) = A$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a-ban, akkor

- $f(x) + g(x)$,
- $f(x) - g(x)$,
- $f(x)g(x)$,
- Ha még $g(a) \neq 0$, akkor $f(x)/g(x)$

is folytonos a-ban.

Folytonosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $f(a) = A$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a-ban, akkor

- $f(x) + g(x)$,
- $f(x) - g(x)$,
- $f(x)g(x)$,
- Ha még $g(a) \neq 0$, akkor $f(x)/g(x)$

is folytonos a-ban.

Ezen túl intervallumon értelmezett folytonos, injektív függvény inverze is folytonos az $f(a)$ pontban.

Folytonosság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $f(a) = A$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a-ban, akkor

- $f(x) + g(x)$,
- $f(x) - g(x)$,
- $f(x)g(x)$,
- Ha még $g(a) \neq 0$, akkor $f(x)/g(x)$

is folytonos a-ban.

Ezen túl intervallumon értelmezett folytonos, injektív függvény inverze is folytonos az $f(a)$ pontban.

Ha $g(x)$ folytonos a-ban és $f(x)$ folytonos $g(a)$-ban, akkor $f(g(x))$ kompozíció is folytonos a-ban.

Folytonosság II

Sőt! Az átviteli elvből következik, hogy $\lim_{x \to a} g(a) = G \in \mathbb{R}$ létezik és f folytonos G-ben akkor

Folytonosság II

Sőt! Az átviteli elvből következik, hogy $\lim_{x\to a} g(a) = G \in \mathbb{R}$ létezik és f folytonos G-ben akkor

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

Folytonosság II

Sőt! Az átviteli elvből következik, hogy $\lim_{x\to a} g(a) = G \in \mathbb{R}$ létezik és f folytonos G-ben akkor

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

Példa:

$$\lim_{x\to 0} \log_3\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \log_3\left(lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right) = \log_3(1) = 0$$

Folytonosság III

Azon függvények terét amelyek folytonosak egy H halmazon (tehát a H halmaz minden pontjában) $C(H)$-val jelöljük. Vagyis $f \in C(H) \Leftrightarrow f$ folytonos H-n.

Folytonosság III

Azon függvények terét amelyek folytonosak egy H halmazon (tehát a H halmaz minden pontjában) $C(H)$-val jelöljük. Vagyis $f \in C(H) \Leftrightarrow f$ folytonos H-n.

Azon pontok halmazát, ahol a függvény folytonos a folytonossági pontok halmazának nevezzük.

Folytonosság III

Azon függvények terét amelyek folytonosak egy H halmazon (tehát a H halmaz minden pontjában) $C(H)$-val jelöljük. Vagyis $f \in C(H) \Leftrightarrow f$ folytonos H-n.

Azon pontok halmazát, ahol a függvény folytonos a folytonossági pontok halmazának nevezzük.

A D_f azon torlódási pontjait, ahol a függvény nem folytonos, szakadási pontoknak nevezzük. Ezeket három csoportba soroljuk:

Folytonosság III

Azon függvények terét amelyek folytonosak egy H halmazon (tehát a H halmaz minden pontjában) $C(H)$-val jelöljük. Vagyis $f \in C(H) \Leftrightarrow f$ folytonos H-n.

Azon pontok halmazát, ahol a függvény folytonos a folytonossági pontok halmazának nevezzük.

A D_f azon torlódási pontjait, ahol a függvény nem folytonos, szakadási pontoknak nevezzük. Ezeket három csoportba soroljuk:

- megszüntethető szakadás: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, de $a \notin D_f$ vagy $f(a) \neq A$.

Folytonosság III

Azon függvények terét amelyek folytonosak egy H halmazon (tehát a H halmaz minden pontjában) $C(H)$-val jelöljük. Vagyis $f \in C(H) \Leftrightarrow f$ folytonos H-n.

Azon pontok halmazát, ahol a függvény folytonos a folytonossági pontok halmazának nevezzük.

A D_f azon torlódási pontjait, ahol a függvény nem folytonos, szakadási pontoknak nevezzük. Ezeket három csoportba soroljuk:

- megszüntethető szakadás: $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, de $a \notin D_f$ vagy $f(a) \neq A$.
- véges ugrás: $\exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) \in \mathbb{R}$ és $\exists \lim\limits_{x \to a-} f(x) \in \mathbb{R}$, de nem egyenlőek.

Folytonosság III

Azon függvények terét amelyek folytonosak egy H halmazon (tehát a H halmaz minden pontjában) $C(H)$-val jelöljük. Vagyis $f \in C(H) \Leftrightarrow f$ folytonos H-n.

Azon pontok halmazát, ahol a függvény folytonos a folytonossági pontok halmazának nevezzük.

A D_f azon torlódási pontjait, ahol a függvény nem folytonos, szakadási pontoknak nevezzük. Ezeket három csoportba soroljuk:

- megszüntethető szakadás: $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, de $a \notin D_f$ vagy $f(a) \neq A$.
- véges ugrás: $\exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) \in \mathbb{R}$ és $\exists \lim\limits_{x \to a-} f(x) \in \mathbb{R}$, de nem egyenlőek.
- lényeges szakadás: összes többi eset, azaz nem létezik bármelyik oldali limesz, vagy létezik, de nem véges.

Nevezetes folytonos függvények

Nevezetes folytonos függvények ($n \in \mathbb{N}$) a teljes $\mathbb{R}$-en:

- x^n
- sin
- cos
- exp
- arctan
- $|x|$

Nevezetes folytonos függvények ($n \in \mathbb{N}$) a teljes értelmezési tartományukon:

- $\log_a(x)$
- $\tan(x)$
- $\arcsin(x)$
- $\arccos(x)$
- $\sqrt[n]{x}$

Bolzano-Darboux-tétel

Tétel (Bolzano-Darboux)

Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum összes pontjában és C egy tetszőleges olyan szám amely $f(a)$ és $f(b)$ közé esik, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$ amelyre $f(c) = C$.

Bolzano-Darboux-tétel

Tétel (Bolzano-Darboux)

Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum összes pontjában és C egy tetszőleges olyan szám amely $f(a)$ és $f(b)$ közé esik, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$ amelyre $f(c) = C$.

Ekvivalens Állítás: Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$-n és $f(a)f(b) < 0$ (azaz $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelű), akkor $f(x)$-nek van gyöke (a,b)-n (azaz létezik, olyan $c \in (a,b)$, amelyre $f(c) = 0$).

Weierstrass tétele

Tétel (Weierstrass)

Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.

Weierstrass tétele

Tétel (Weierstrass)

Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.

Egy intervallumot kompaktnak nevezünk, ha korlátos és zárt.

Weierstrass tétele

Tétel (Weierstrass)

Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye.

Egy intervallumot kompaktnak nevezünk, ha korlátos és zárt.

A két tétel következménye: Az $[a,b]$ kompakt intervallum folytonos képe kompakt. Más megfogalmazásban: Korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete korlátos, zárt intervallum.